

Systèmes Linéaires Passifs sous échantillonnage

Fernando Tiefensee¹

F. Tiefensee est doctorant au Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS-Supelec, Plateau de Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette, France
Contact : tiefensee@lss.supelec.fr

Résumé

L'objectif de cet article est d'étudier les conséquences de l'échantillonnage sur les systèmes passifs. Il est bien connu qu'un système doit avoir des caractéristiques structurelles supplémentaires pour maintenir sa passivité dans un contexte échantillonné. Comme dans la plupart des cas, ces conditions ne sont pas vérifiées, des solutions visant à préserver cette propriété sont développées. Un changement de sortie est introduit et des lois de commande pour la stabilisation sont présentées.

Abstract

The objective of this paper is to present a study concerning the effects of the sampling procedure over the passivity properties. It is well-known that a passive system must have additional specific structures to maintain passivity under sampling. Possible solutions are developed aiming to relax these constraints. In particular a modified output with interesting physical signification is proposed. Solutions to control design, using this modified output, are also presented.

Mots-clés : Automatique Linéaire, Systèmes en Temps Discret, Passivité sous Echantillonnage

Keywords: Control Systems, Linear Systems, Discret-time Systems, Passivity under Sampling

1. Introduction

La théorie de la passivité est un concept important de l'automatique pour l'analyse et pour la commande de systèmes dont certaines caractéristiques entrée/sortie sont établies en termes de critères énergétiques. Héritées de phénomènes physiques bien connus, les notions de passivité sont adaptées à plusieurs domaines scientifiques et se montrent efficaces pour la régulation de systèmes électriques, mécaniques et électromécaniques présents en plusieurs domaines de l'ingénierie, tels que la robotique, l'électronique de puissance, l'aéronautique, etc.

L'étude du comportement énergétique d'un système basée sur l'observation de certains phénomènes physiques (production, dissipation ou stockage d'énergie) donne, au delà d'une interprétation intuitive et physique du flot d'énergie au travers les éléments composant le système, une base pour l'analyse de propriétés, telle la stabilité (pour plus de détails, voir [11]).

L'intuition suggère qu'un système constitué par l'interconnexion de plusieurs éléments passifs, c.à.d. ne produisant pas d'énergie, reste passif. Si, au moins, un de ces éléments dissipe de l'énergie, alors le système complet sera dissipatif. Ces idées trouvent facilement une illustration dans la théorie de circuits électriques :

Exemple 1.1 Considérant le classique modèle RLC d'une ligne de transmission, où la tension U est l'entrée, le courant I est une sortie choisie et le produit UI est la puissance instantanée fournie au système, l'espace d'état du système peut être écrit en fonction du courant $I = x_1$ qui traverse l'inductance L , et de la tension x_2 aux bornes du condensateur C .

L'énergie totale fournie au système est en partie emmagasinée par l'inductance L et par le condensateur C , selon la fonction $V(x) = \frac{1}{2}Lx_1^2 + \frac{1}{2}Cx_2^2$ et en partie dissipée par l'effet Joule à travers des résistances R_1 et R_2 . De cette façon, une fois qu'il n'y a pas dans le système d'éléments actifs, l'énergie totale stockée

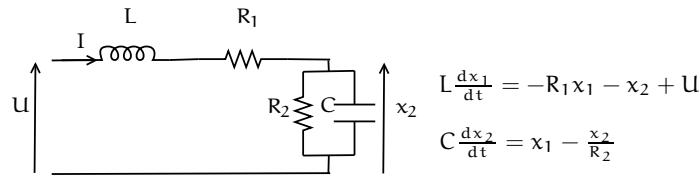


FIG. 1 – Circuit RLC

dans une certaine période de temps T est toujours inférieur à l'énergie fournie au système pendant le même intervalle :

$$V(x(t)) - V(x(0)) < \int_0^T U(\tau)I(\tau)d\tau \quad (1)$$

Si le système ne compte pas d'élément dissipatifs, alors l'inéquation (1) devient $V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^T U(\tau)I(\tau)d\tau$ et on se place dans le cas "sans pertes" ("lossless", en anglais). Etant donné que l'inéquation (1) doit être vérifiée pour tout $t \geq 0$, alors la variation de l'énergie emmagasinée est toujours inférieure ou égale à la puissance instantanée fournie au système :

$$\dot{V}(x(t)) \leq UI \quad (2)$$

Le long des trajectoires du système on a $\dot{V} = Lx_1\dot{x}_1 + Cx_2\dot{x}_2 = UI - R_1x_1^2 - \frac{1}{R_2}x_2^2$, et considérant $R_1, R_2 \geq 0$ et donc l'inéquation (2) est aisément vérifiée.

Ces concepts sont exploités par l'automatique depuis les années 60, et aujourd'hui une théorie solide de passivité en temps continu est disponible dans la littérature. Par contre, les implémentations analogiques de systèmes de contrôle / commande ont été substituées graduellement dans les dernières décennies par des réalisations numériques assurées par calculateurs. Aujourd'hui l'implantation des systèmes automatisés étant réalisée par des ordinateurs, les mesures du procédé sont obtenues à partir d'échantillons et la commande est construite par des algorithmes numériques à partir de ces données. Dans un contexte industriel, où il y a une exigence croissante de performances, une validation sous échantillonnage des schémas de contrôle/commande en temps continu est donc indispensable.

Il est bien connu que la passivité n'est pas assurée sous échantillonnage, et une loi de commande établie sur cette propriété peut présenter des problèmes de réalisation, voire de robustesse, dans un contexte numérique. Le but de cet article est alors de fournir une étude sur la passivité sous échantillonnage dans un contexte linéaire et de proposer des solutions pour la préservation de cette propriété et pour la stabilisation de systèmes passifs sous échantillonnage.

Cet article est organisé comme suit : dans la section 2, des rappels concernant les concepts fondamentaux de passivité en temps continu et discret sont faits ; dans la section 3, la perte de la passivité sous échantillonnage est illustrée, des solutions pour la maintenir à partir d'une sortie "moyennée" sont décrites. La section 4 illustre les difficultés inhérentes à l'utilisation de cette nouvelle sortie pour construire une commande qui stabilise le système. L'injection d'un amortissement discret est en suite considéré. L'exemple du système masse-ressort est utilisé à la section 5 pour analyser les performances des lois de commande proposées.

2. Rappels

2.1. Passivité en temps Continu

Les notions intuitives introduites sur l'exemple 1.1 sont facilement adaptées à la classe des Systèmes Linéaires Invariants dans le Temps (LTI-Linear Time-Invariant) [11] :

Soit (A, B, C, D) la réalisation minimale du Système LTI

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3)$$

où $x(t) \in \mathfrak{R}^n, y, u \in \mathfrak{R}^m$ et A, B, C, D sont matrices constantes de dimensions appropriées. Cette classe de systèmes dynamiques a un intérêt particulier en théorie de contrôle et possède un vaste et sophistiqué catalogue de techniques de commande. Les hypothèses de base sont : linéarité, stationnarité et nombre fini de degrés de liberté.

Une définition générale de passivité est posée :

Définition : 2.1 [1] *Le système (3) est passif s'il existe une fonction non-négative $V : X \rightarrow \mathbb{R}$, dite fonction de stockage, telle que $V(0) = 0$ et pour tout $t > 0$, entrée u et condition initiale $x(0)$ elle vérifie :*

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^t y^T(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (4)$$

Théorème : 2.1 [11] *Considérant le système (3), l'inégalité matricielle*

$$H = \begin{bmatrix} A^T P + P A & P B - C^T \\ B^T P - C & -D - D^T \end{bmatrix} \leq 0$$

avec $P = P^T \leq 0$, a une solution si et seulement s'il est passif par rapport au lien entrée/sortie $u \rightarrow y$. $V = \frac{1}{2}x^T P x$ définit une fonction quadratique de stockage d'énergie si et seulement si elle satisfait ces inégalités.

Un cas typique dans les applications pratiques sont les systèmes sans lien direct entrée/sortie, soit $D = 0$. Pour cette classe de systèmes les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une matrice $P = P^T \geq 0$ qui vérifie le théorème 2.1 sont :

$$(i) A^T P + P A; \leq 0 \quad (ii) C = B^T P.$$

2.2. Passivité en temps Discret

Considérons un système discret linéaire invariant dans le temps :

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k; \quad y_k = C x_k + D u_k \quad (5)$$

où $x_k \in \mathfrak{R}^n$, $y_k, u_k \in \mathfrak{R}^m$ et A_d, B_d, C, D sont des matrices constantes de dimension appropriée. Au lieu d'une équation aux différences comme en (5), une nouvelle représentation par espace d'état, décrite à partir d'une équation différentielle et une aux différences (modelant la dynamique libre et commandée respectivement) a été proposée en [4] sous le nom de DDR (*Représentation Différentielle et aux Différences*). En adoptant cette représentation, l'équation (5) peut être réécrite dans la forme :

$$x^+(0) = A_d x; \quad \frac{dx^+(u)}{du} = B_d,$$

où $x^+(u)$ indique une courbe de \mathfrak{R}^n paramétrée par u . A partir de x_k on calcule $x_k^+(0) = A_d x_k$ et, à partir de l'intégration du terme différentiel $\frac{dx^+(u)}{du}$ entre 0 et u_k on retrouve (5), c.à.d.

$$x_k^+(u_k) := x_{k+1} = A_d x_k + \int_0^{u_k} B_d dv = A_d x_k + B_d u_k.$$

Par analogie au cas continu, une définition formelle de passivité en temps discret est posée, à partir de l'idée que l'énergie stockée par un certain système le long de ses trajectoires ne peut pas excéder l'énergie qui lui est fournie :

Définition : 2.2 [3] *Un système en temps discret, dans la forme d'une équation aux différences (5) est passif s'il existe une fonction C^0 non-négative $V : X \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $V(0) = 0$ et pour tout u_k et x_k*

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq y_k^T u_k$$

Considérant une fonction quadratique de stockage d'énergie $V(x_k) = \frac{1}{2}x_k^T P x_k$, cette définition s'est réécrit sous la forme d'une Inégalité Matricielle LMI - *Linear Matrix Inequality* :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_k^T & u_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_d^T P A_d - P & A_d^T P B_d - C^T \\ B_d^T P A_d - C & B_d^T P B_d - (D + D^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \leq 0.$$

La solution de cette inégalité est exprimée en termes de la proposition suivante.

Proposition : 2.1 [3] *Si le système linéaire en temps discret (5) est passif avec une fonction quadratique de stockage d'énergie $V(x)$, alors il existe une matrice $P = P^T \geq 0$ telle que*

$$(i) A_d^T P A_d - P \leq 0; \quad (ii) B_d^T P A_d = C; \quad (iii) B_d^T P B_d - (D^T + D) \leq 0$$

La condition (iii) impose, pour un P non négatif, que la matrice D soit non nulle.

3. Passivité sous Echantillonnage

Pour un système donné, on observe à partir des résultats de la section précédente que la passivité dépend de la sélection du couple entrée-sortie, et ainsi, elle ne peut pas être traitée comme une caractéristique intrinsèque du système. En particulier, quand on passe au contexte échantillonné, les dynamiques de l'entrée ainsi que de la sortie, étant maintenues constantes pendant un certain intervalle de temps (période d'échantillonnage δ) par un bloqueur d'ordre zéro et par un échantillonneur, subissent des modifications. De cette façon, même si le système continu présentait un lien entrée/sortie passif, cette propriété n'est pas forcément préservée sous échantillonnage, car les opérations de blocage/échantillonnage ne sont pas, en pratique, parfaitement inverses.

Dans la section qui suit, les conditions structurelles selon lesquelles un système passif en temps continu et sans lien direct entrée/sortie, c.à.d. $D = 0$, maintient cette propriété sous échantillonnage seront analysées.

3.1. Perte de la passivité sous échantillonnage

Revenons au système (3), avec $D = 0$. Supposant que la commande u est constante pendant des intervalles d'amplitude δ , $u(t) = u_k$ pour $t \in [k\delta, (k+1)\delta]$, pour un $\delta \in [0, T^*]$, $T^* > 0$ suffisamment petit, alors sa dynamique échantillonnée est définie comme la dynamique qui, soumise à une telle commande u_k , reproduit l'évolution de (3) aux instants, $t = k\delta$, $k > 0$. L'intégration de (3), avec sortie $y = Cx$, dans un intervalle d'amplitude δ conduit à une équation aux différences de la forme :

$$x_{k+1} = A^\delta x_k + B^\delta u_k; \quad y_k = Cx_k \quad (6)$$

avec $x_k \in \mathbb{R}^n$, $y_k, u_k \in \mathbb{R}^m$, $A^\delta = e^{\delta A} = (1 + \sum_{i \geq 1} \frac{\delta^i}{i!} A^i)$, $B^\delta = \int_0^\delta e^{\tau A} B d\tau = \sum_{i \geq 0} \frac{\delta^{i+1}}{(i+1)!} A^i B$. Dans un contexte échantillonné la DDR, présentée dans la section précédente s'écrit :

$$x^+(0) = A^\delta x; \quad \frac{dx^+(\delta u)}{d(\delta u)} = \frac{B^\delta}{\delta} \quad (7)$$

avec une sortie $y^+(v) = Cx^+(v)$. En fait, à partir de la définition 2.2 et de la proposition 2.1, il est clair qu'un système passif en temps continu sans lien direct (c.à.d. $D = 0$) ne préserve pas la passivité sous échantillonnage. Cette pathologie a motivé plusieurs études et des possibles solutions sont présentées dans la section qui suit.

3.2. Maintien de la passivité sous échantillonnage

Une solution dans un contexte linéaire a été récemment proposée en [2], où la définition standard de passivité en temps discret est maintenue sous échantillonnage par rapport à une sortie modifiée. La première partie de cette section a pour objectif d'illustrer cette solution.

Soit le système linéaire (3) passif en temps continu, avec une fonction quadratique de stockage d'énergie $V = \frac{1}{2}x^T P x$, $P = P^T \geq 0$; alors la variation de l'énergie stockée est toujours décroissante et le critère (4) est satisfait. Considérant que le même système est soumis à une commande constante par morceaux et que l'état reste bloqué pendant une période d'amplitude δ , alors l'équation (4) peut être réécrite :

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq u_k \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} y^T(\tau) d\tau \quad (8)$$

Selon la définition 2.2, un système passif en temps continu préserve la passivité sous échantillonnage par rapport à une sortie modifiée (ayant un lien direct entrée/sortie D_{mod}^δ), définie sur une période d'échantillonnage comme :

$$y_{\text{mod}}^\delta = \int_0^\delta y^T(\tau) d\tau = C_{\text{mod}}^\delta x_k + D_{\text{mod}}^\delta u_k \quad (9)$$

où $C_{\text{mod}}^\delta = C \int_0^\delta e^{\tau A} d\tau$ et $D_{\text{mod}}^\delta = C \int_0^\delta \int_0^\tau e^{sA} B ds d\tau$.
Le théorème suivant a été prouvé en [5].

Théorème : 3.1 Soit le système linéaire invariant dans le temps (3), avec sortie $y = Cx$, passif avec une fonction quadratique de stockage d'énergie $V = \frac{1}{2}x^T Px$, $P = P^T \geq 0$. Alors son équivalent échantillonné (6) est aussi passif en temps discret pour tout $\delta \in]0, T^*]$, $T^* > 0$ suffisamment petit, par rapport à la sortie modifiée y_{mod}^δ définie en (9) avec la même fonction de stockage V , c.à.d.

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq u_k y_{\text{mod}}^\delta$$

3.3. Passivité en Moyenne

A partir des concepts développés dans les sections précédentes et de quelques manipulations algébriques, la sortie modifiée par rapport à laquelle la passivité est préservée sous échantillonnage assume une intéressante signification physique. En décrivant l'évolution du système sous échantillonnage en la forme DDR, suggérée en (7), la variation de l'énergie stockée par le système peut être écrite :

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) = \frac{1}{2}x_k^T (A^{\delta T} P A^\delta - P) x_k + u_k^T B^{\delta T} P A^\delta x_k + \frac{1}{2}u_k^T B^{\delta T} P B^\delta u_k \quad (10)$$

avec $\frac{1}{2}x_k^T (A^{\delta T} P A^\delta - P) x_k = \frac{1}{2} \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} \dot{V}(x(\tau), 0) d\tau \leq 0$ étant donné que si le système continu est passif et donc stable avec $u = 0$, c.à.d. $\dot{V}(x(t), 0) \leq 0$, on obtient

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq u_k^T B^{\delta T} P A^\delta x_k + \frac{1}{2}u_k^T B^{\delta T} P B^\delta u_k$$

où les termes à droite de l'inégalité peuvent être écrits sous une forme intégrale en u_k , en définissant la sortie moyennée par rapport à l'amplitude de la commande :

Définition : 3.1 Un système échantillonné linéaire sous la forme de (7), avec sortie $y_k = Cx_k$, pour toute amplitude de commande v_d admissible, possède comme sortie moyennée entre $]0, v_d]$

$$y_{av}(\delta u_k) = \frac{1}{\delta u_k} \int_0^{\delta u_k} \frac{B^{\delta T}}{\delta} P x^+(v) dv = C_{av}^\delta x_k + D_{av}^\delta u_k \quad (11)$$

avec $C_{av}^\delta = B^{\delta T} P A^\delta$ et $D_{av}^\delta = \frac{1}{2\delta} B^{\delta T} P B^\delta$.

Théorème : 3.2 Un système linéaire invariant dans le temps sous la forme (3), ayant pour sortie $y^+(u) = Cx^+(u)$, passif avec une fonction quadratique de stockage d'énergie $V = \frac{1}{2}x^T Px$, $P = P^T \geq 0$ est passif sous échantillonnage, i. e. passif par rapport à sa sortie moyennée définie en (11), avec la même fonction de stockage V , pour tout $\delta \in]0, T^*]$, $T^* > 0$ suffisamment petit, u_k et x_0 .

4. Conception de la Commande

Un des principaux intérêts d'un système passif, réside dans la facilité de concevoir une loi de commande qui le stabilise. Revenons, par exemple au cas continu : analysant la définition 2.1, il est clair que si l'on est capable de mesurer directement la sortie $y(t)$ par rapport à laquelle un certain système est passif, alors on peut le stabiliser à partir d'un bouclage négatif du type $u(t) = -K_c y(t)$, $K_c > 0$. Une telle commande $u(t)$ peut être interprétée comme l'injection d'un amortissement qui dissipe l'énergie totale du système. Ainsi, l'énergie emmagasinée dans le système décroît à un taux $\dot{V} \leq -K_c y^2 < 0$, et le système est stabilisé asymptotiquement.

Dans cette section on proposera deux méthodes de construction d'une commande stabilisante sous échantillonnage : la première est construite à partir de la sortie modifiée (par rapport à laquelle le système échantillonné est passif), en assurant la négativité du membre de droite de (8); et la seconde reproduit aux instants d'échantillonnage, les performances énergétiques du schéma de commande continu, ce qui peut être interprété comme une version échantillonnée de l'injection d'amortissement.

4.1. Bouclage sur la sortie modifiée

Analoguement au cas continu et selon la définition 2.2, la stabilité asymptotique d'un système passif en temps discret pourrait être assurée à partir d'une commande $u_k = -K_c y_k$, $K_c > 0$. Par contre sous échantillonnage, quand on modifie la sortie à fin de maintenir la passivité, une

difficulté apparaît dû au fait que la sortie modifiée $y_{\text{mod}}(u_k)$ dépend implicitement de u_k . Considérant la classe des systèmes linéaires mono-entrée/mono-sortie, pour résoudre l'égalité $u_k = -K_c y_{\text{mod}}^\delta$, avec une manipulation algébrique simple on pose :

$$u_k = -K_c \frac{C_{\text{mod}}^\delta}{1 + K_c D_{\text{mod}}^\delta} x_k \quad (12)$$

4.2. Amortissement Numérique - Digital Damping

Une des techniques classiques stabilisation asymptotique en temps continu pour des systèmes ayant une évolution libre stable (cas des systèmes passifs), introduite en [9], est l'injection d'un amortissement supplémentaire à partir d'une commande du type $L_g V$. Dans le cas du système LTI (3), si l'on calcule la dérivée de la fonction quadratique d'énergie $V = \frac{1}{2} x^T P x$ on obtient :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} x^T (A^T P + P A) x + x^T P B u. \quad (13)$$

Si le système est passif, le premier terme du membre droit de (13) est non positif. Le système sans commande est alors stable, mais on peut injecter un amortissement supplémentaire pour contrôler la vitesse avec laquelle le système converge vers son point d'équilibre. Une telle injection est réalisée avec une commande du type $u = -K_c B^T P x$, $K_c > 0$. Ainsi, le second terme à droite de (13) devient aussi négatif, maximisant la négativité de \dot{V} . Le système bouclé et la variation d'énergie deviennent :

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_c B B^T P) \tilde{x} = \tilde{A} x, \quad \dot{V}(\tilde{x}) = \tilde{x}^T \left(\frac{A^T P + P A}{2} - K_c P B B^T P \right) \tilde{x} < 0 \quad (14)$$

où \tilde{x} indique l'état soumis à commande u . Une fois que l'on a, en temps continu, une loi de commande qui confère au système une performance énergétique satisfaisante, on peut reproduire ces performances sous échantillonnage à partir d'une commande constante par morceaux du type

$$u_k = u_{d0} + \sum_{i \geq 1} \frac{\delta^i}{(i+1)!} u_{di}. \quad (15)$$

Une telle approche a été développée dans un contexte non linéaire de reproduction entrée/sortie en [4] et puis spécialisé au cas des commandes non linéaires du type $L_g V$ en [10]. En fait, il ne s'agit pas d'émuler la commande continue, mais de calculer une commande qui garantit au système sous échantillonnage un comportement énergétique proche du continu. Ainsi, considérant le cas linéaire, \dot{V} en (14), peut être écrit aux instants d'échantillonnage comme

$$V(\tilde{x}_{k+1}) - V(\tilde{x}_k) = \tilde{x}_k^T \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} e^{\tau \tilde{A}^T} \left(\frac{P A + A^T P}{2} \right) e^{\tau \tilde{A}} d\tau \tilde{x}_k - K_c \tilde{x}_k^T \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} e^{\tau \tilde{A}^T} P B B^T P e^{\tau \tilde{A}} d\tau \tilde{x}_k.$$

Comparant cette expression avec l'évolution énergétique du système (6), décrite en (10), et en imposant $\tilde{x}_k = x_k$ on peut calculer la loi de commande u_k pour que les évolutions énergétiques des systèmes continu et échantillonné coïncident aux instants d'échantillonnage.

$$V(\tilde{x}_{k+1}) - V(\tilde{x}_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) \quad (16)$$

On arrive ainsi au résultat suivant :

Théorème : 4.1 *Si le système linéaire invariant dans le temps (3), mono-entrée, mono-sortie ($u \in \mathfrak{R}^1$, $y \in \mathfrak{R}^1$), est stabilisé asymptotiquement en son point d'équilibre par une commande $u_c = -K_c B^T P x$, alors pour toute période d'échantillonnage $\delta \in]0; T^*]$, $T^* > 0$ suffisamment petit, il existe une commande constante par morceaux du type (15) qui le stabilise asymptotiquement en son point d'équilibre avec les mêmes performances énergétiques (même amortissement). La solution est calculée terme à terme pour satisfaire l'égalité de séries (16). On obtient pour les premiers termes :*

$$u_{d0} = u_c(k\delta) = -K_c B^T P x_k; \quad u_{d1} = \dot{u}_c(k\delta) = -K_c B^T P \tilde{A} x_k; \\ u_{d2} = -K_c B^T P \tilde{A} \left(\tilde{A} - \frac{x_k B^T}{2 B^T P x_k} (P \tilde{A} + A^T P) \right) x_k$$

ce qui est suffisant pour assurer (16) jusqu'à l'ordre $O(\delta^3)$ (erreur juste en $O(\delta^4)$).

Remarque : Le terme u_{d0} correspond à la commande continue u_c émulée et u_{d1} correspond à la première dérivée temporelle. Ainsi, l'implantation d'un contrôleur $u_k^1 = u_{d0} + \frac{\delta}{2} u_{d1}$ est simple et assure l'égalité (16) jusqu'à l'ordre $O(\delta^2)$ (erreur juste en $O(\delta^3)$). \triangleleft

5. Exemple : Système Masse-Ressort [8]

Un système de 3 masses m_1 , m_2 et m_3 connectées en série par deux ressorts avec constantes élastiques k_1 et k_2 et commandé par une force u appliquée sur la masse m_1 , est décrit par la représentation d'état suivante (les pertes par frottement sont négligées) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_q \\ \dot{x}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ x_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 0 & B_p M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ x_p \end{bmatrix}$$

où $x_q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ est le vecteur des coordonnées généralisées (ce qui correspond à la position de m_1 , m_2 et m_3 respectivement) et $x_p = [p_1 \ p_2 \ p_3]^T$ indique le quantité de mouvement généralisé (moment conjugué ou encore impulsion généralisée); $B_p = [1 \ 0 \ 0]^T$. L'énergie totale stockée dans le système est la somme de l'énergie potentielle et cinétique et peut être écrite sur la forme quadratique :

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_q^T & x_p^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ x_p \end{bmatrix}$$

avec $\kappa = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$ et $M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$. Comme les effets de frottement sont négligés, une simple manipulation montre que le système est sans pertes ("lossless"), c.à.d. $A^T P + P A = 0$ et $C = B^T P$. La stabilisation d'un tel système en temps continu est réalisée par une injection d'amortissement du type $u = -K_c y$.

Le but de cette section est de comparer, à partir des simulations numériques, les performances de $u_k^e = -K_c y|_{t=k\delta}$, dite la commande émulée; le bouclage négatif de la sortie modifiée, $u_k^{nof} = -K_c y_{mod}^\delta$, en (12); et de l'injection d'amortissement u_k^{dda} avec 2 termes correcteurs proposée au théorème 4.1.

Les paramètres suivants ont été adoptés : , $k_1 = 7N/m$ and $k_2 = 5N/m$; $m_i = 1kg$, $i = 1, 2, 3$, $x_q(0) = [100 \ 110 \ 120]^T m$ and $x_p(0) = [100 \ 100 \ 100]^T kg.m/s$. Le gain de la commande est maintenu le même dans les toutes simulations, $K_c = 2$.

Les figures 2(a)-2(b) montrent que pour une période d'échantillonnage petite, même la commande émulée stabilise le système avec des performances acceptables et proches des commandes u_k^{nof} et u_k^{dda} . Par contre avec une période $\delta = 0.8s$ la commande émulée le déstabilise (figure 3(b)), et les solutions alternatives doivent être employées. u_k^{dda} et u_k^{nof} assurent la stabilité en gardant une évolution énergétique acceptable et très proche du cas continu (en particulier u_k^{dda}).

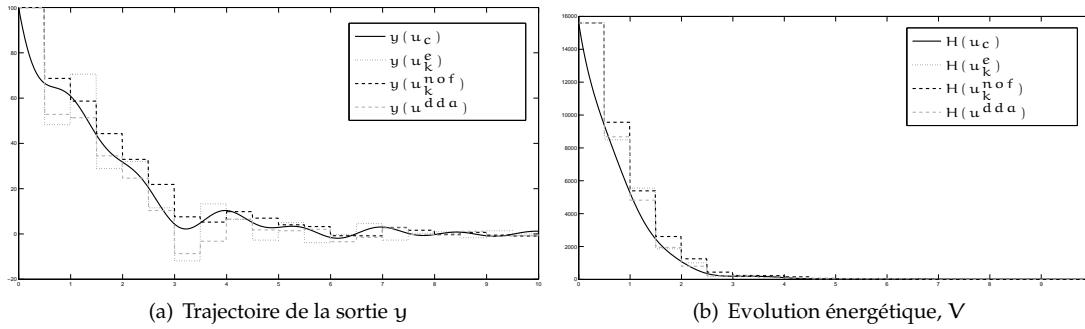
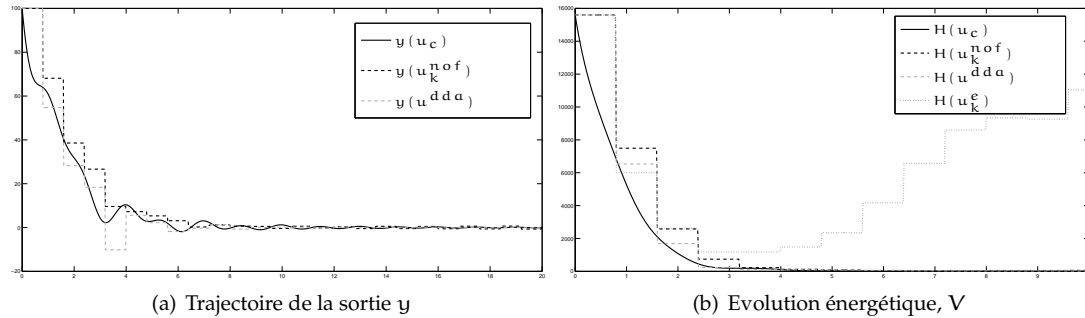
6. Conclusion et perspectives

La question de la perte de la passivité sous échantillonnage a été discutée et illustrée. Il a été démontré qu'à partir d'une sortie "moyennée", la passivité est préservée dans un contexte échantillonné. Toutefois l'utilisation de cette sortie pour la construction d'une loi de commande stabilisante n'est pas facile à cause de sa dépendance implicite en la commande. Une solution possible pour la stabilisation de cette classe de systèmes est l'injection d'un amortissement discret.

Une des principales applications de la passivité pour la construction de commandes stabilisantes en temps continu est l'IDA- PBC (de l'anglais *Interconnection and Damping Assignment - Passivity Based Controller*) (voir [7]). Cette technique consiste en, étant donné un système en temps continu non passif, proposer une commande *passifiante* qui, à partir du façonnement de l'énergie, rend d'abord le système passif et puis injecte un amortissement capable de contrôler sa vitesse de convergence au point d'équilibre. La principale perspective de ce travail est d'utiliser les propriétés structurelles de la passivité en moyenne pour construire une commande "*passifiante*" sous échantillonnage (voir [6]) et puis, à partir des concepts d'amortissement discret, présentés dans ce travail, proposer une version échantillonnée de l'IDA-PBC.

Bibliographie

1. C.I. Byrnes, A. Isidori and J.C. Willems (1991) Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems, *IEEE Trans. on AC*, **36**, pp 1228–1240.

FIG. 2 – Performances du système, $\delta = 0.5s$ FIG. 3 – Performances du système, $\delta = 0,8$.

2. R. Costa-Castello and E. Fossas (2007) On preserving passivity in sampled-data linear systems, *Proc. ACC*, Minneapolis, 4373–4378.
3. S. Monaco, D. Normand-Cyrot (1997), On the conditions of passivity and losslessness in nonlinear discrete-time, *Proc. ECC-97*, Bruxelles.
4. S. Monaco and D. Normand-Cyrot (2007), Advanced tools for nonlinear sampled-data systems analysis and control, *European Journal of Control, Special Issue*, 13, 2, pp 221-241.
5. S. Monaco, D. Normand-Cyrot and F. Tiefensee, From passivity under sampling to a new discrete-time passivity concept, *Proc. 47th IEEE-CDC*, Cancun, 2008.
6. S. Monaco, D. Normand-Cyrot and F. Tiefensee (2009) Nonlinear port controlled Hamiltonian systems under sampling, *Proc. 48th IEEE-CDC*, Shanghai.
7. R. Ortega, E. Garcia-Canseco (2004), Interconnection and damping assignment passivity-based control : A survey, *European Journal of Control*, 10, 432-450.
8. S. Prajna, A. Van der Schaft, G. Meinsma(2002), An LMI approach to stabilization of linear port-controlled Hamiltonian systems, *Systems and Control Letters*, 45, 371 - 385.
9. R.Sepulchre, M. Jankovic and P. Kokotovic *Constructive Nonlinear Control*, Springer-Verlag, 1997, 110-112.
10. F. Tiefensee, S. Monaco and D. Normand-Cyrot (2009), Lyapunov design under sampling for a Synchronous Machine Infinity Bus System, *Proc. ECC-09*.
11. J.C. Willems (1972) Dissipative dynamical systems - Part I : General theory – Part II : Linear systems with quadratic supply rates, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **45**, 321–351, 352-393.

Ce travail a été développé dans le cadre de la thèse de Fernando Tiefensee dirigée par **Dorothee Normand-Cyrot**, Directeur de Recherche CNRS au Laboratoire de Signaux et Systèmes (LSS-CNRS-Supelec), sous la co-direction de **Salvatore Monaco**, Professeur au Dipartimento di Informatica e Sistemistica «Antonio Ruberti» à l'Université la Sapienza. Ce doctorat reçoit un soutien à la mobilité de l'Université Franco Italienne - Italo Française - UFI/UIF.
